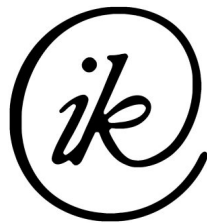


# DISZKRÉT MATEMATIKA I. TÉTELEK

Szerkesztette: BÓKAY CSONGOR

*2011 őszi félév*



Az esetleges hibákat kérlek a [csongor@csongorbokay.com](mailto:csongor@csongorbokay.com) címen jelezd!

Utolsó módosítás: 2012. január 16.



Ez a Mű a Creative Commons Nevezd meg! - Ne add el! - Így add tovább! 3.0 Unported Licenc feltételeinek megfelelően szabadon felhasználható.

### 1. Mondjon legalább három példát predikátumra!

$P(x)$  -  $x$  prím  
 $E(x)$  -  $x$  egyenes

$M(x, y)$  -  $x$  merőleges  $y$ -ra  
 $D(x, y)$  -  $x$  osztója  $y$ -nak

### 2. Sorolja fel a logikai jeleket!

$\wedge$  - „és” (konjunkció)  $\Leftrightarrow$  - „akkor, és csak akkor” (ekvivalencia)  
 $\vee$  - „vagy” (diszjunkció)  $\neg$  - „nem” (negáció)  
 $\Rightarrow$  - „ha ..., akkor ...” (implikáció)  $\oplus$  - kizáró vagy

### 3. Milyen kvantorokat ismer? Mi a jelük?

$\exists$  - létezik, idegen szóval egzisztenciális kvantor  
 $\forall$  - minden, azaz univerzális kvantor

### 4. Mikor van egy változó egy kvantor hatáskörében?

A  $(\forall x \mathcal{F})$  formulában az  $\mathcal{F}$ -ben szereplő  $x$  változók a  $\forall$  kvantor hatáskörében állnak.

### 5. Mik a nyitott, és mik a zárt formulák?

Ha egy formulának van szabad változója, akkor nyitott, egyébként zárt.

### 6. Mondjon két példát nyitott formulára!

$E(x)$  -  $x$  egyenes  $I(x, y)$  -  $x$  egyenes illeszkedik  $y$  pontra  
 $P(x)$  -  $x$  pont

$x$  és  $y$  szabad változók az alábbi nyitott formulákban:

$$\mathcal{A}(x, y) = (E(x) \wedge P(y) \wedge I(x, y))$$

$$\mathcal{B}(x, y) = ((E(x) \wedge I(x, y)) \Rightarrow P(y))$$

### 7. Mondjon egy példát zárt formulára!

$$\mathcal{C}() = \left( \forall x (E(x) \Rightarrow \exists y (P(y) \wedge I(x, y))) \right)$$

### 8. Definiálja a részhalmaz és a valódi részhalmaz fogalmát, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket!

$B$  halmaz részhalmaza  $A$  halmaznak, ha  $B$  minden eleme  $A$ -nak is eleme.

Jelölés:  $B \subseteq A$ ,  $A \supseteq B$

Ha  $B$  részhalmaza  $A$ -nak, de nem egyenlő vele, akkor  $B$  valódi részhalmaza  $A$ -nak.

Jelölés:  $B \subset A$ ,  $A \supset B$

### 9. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a halmazok egyenlősége?

$A, B, C$  halmazok esetén:

1. reflexív:  $(\forall A (A = A))$
2. tranzitív:  $(\forall A, B, C ((A = B) \wedge (B = C)) \Rightarrow (A = C))$
3. antiszimmetrikus:  $(\forall A, B ((A = B) \wedge (B = A)) \Rightarrow (A = B))$
4. szimmetrikus:  $(\forall A, B ((A = B) \Rightarrow (B = A)))$

### 10. Írja le a részhalmaz fogalmát! Milyen jelöléseket használunk a részhalmazok megadására?

$B$  halmaz részhalmaza  $A$  halmaznak, ha  $B$  minden eleme  $A$ -nak is eleme.

Formálisan:  $B = \{x \in A \mid \mathcal{F}(x)\}$

### 11. Írja le az üres halmaz fogalmát!

Olyan halmaz, melynek nincs eleme. Jelölés:  $\emptyset = \{\}$

**12. Igaz-e, hogy csak egy üres halmaz van?**

Igaz, a meghatározottsági axióma miatt csak egy üres halmaz van.

**13. Írja le két halmaz unióját, és a megfelelő jelöléseket!**

Ha  $A$  és  $B$  halmaz, akkor  $A$  unió  $B$  azokat az elemeket tartalmazza, melyek  $A$ -nak,  $B$ -nek vagy mindkettőnek elemei. Jele:  $A \cup B$

**14. Írja le a halmazrendszer unióját, és a megfelelő jelöléseket!**

Olyan halmaz, melynek elemei az  $\mathcal{A}$  halmazrendszer valamely elemének az elemei.

Formálisan:  $\cup \mathcal{A} = \cup_{H \in \mathcal{A}} H = \{x \mid \exists H \in \mathcal{A} : x \in H\}$

Jelölés:  $\cup \mathcal{A}$ ,  $\cup \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$ ,  $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$

**15. Fogalmazza meg a halmazok uniójának alaptulajdonságait!**

$A, B, C$  halmazok

1.  $A \cup \emptyset = A$
2.  $A \cup B = B \cup A$  (kommutatív)
3.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (asszociatív)
4.  $A \cup A = A$  (idempotens)
5.  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

**16. Definiálja a halmazrendszer és két halmaz metszetét, illetve adja meg a kapcsolódó jelöléseket!**

Ha  $A$  és  $B$  halmaz, akkor  $A$  metszet  $B$  azon elemek halmaza, melyek  $A$ -nak és  $B$ -nek is elemei. Jelölés:  $A \cap B$

Formálisan:  $A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\}$

$\mathcal{A}$  halmazrendszer metszete az a halmaz, melynek elemei a halmazrendszer minden elemének eleme. Jelölés:  $\cap \mathcal{A}$ ,  $\cap \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$ ,  $\cap_{A \in \mathcal{A}} A$

Formálisan:  $\cap \mathcal{A} := \{a : a \in A \text{ minden } A \in \mathcal{A}\text{-ra}\}$

**17. Fogalmazza meg a halmazok metszetének alaptulajdonságait!**

$A, B, C$  halmazok

1.  $A \cap \emptyset = \emptyset$
2.  $A \cap B = B \cap A$  (kommutatív)
3.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (asszociatív)
4.  $A \cap A = A$  (idempotens)
5.  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

**18. Fogalmazza meg az unió és a metszet disztributivitását!**

$A, B, C$  halmazok

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**19. Definiálja a halmazok különbségét, szimmetrikus differenciáját és komplementerét!**

$A, B$  halmaz

különbség:  $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$

szimmetrikus differencia:  $A \Delta B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$A$  halmaz  $X$ -re vonatkozó komplementere:  $\bar{A} := X \setminus A$

**20. Fogalmazza meg a halmazok komplementerének alaptulajdonságait!**

- |                                  |  |  |
|----------------------------------|--|--|
| 1. $\overline{\overline{A}} = A$ | 3. $\overline{\overline{X}} = \emptyset$ | 6. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$ |
| 2. $\overline{\emptyset} = X$    | 4. $A \cup \overline{A} = X$             | 7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$              |
|                                  | 5. $A \cap \overline{A} = \emptyset$     | 8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$              |

**21. Írja le a hatványhalmaz fogalmát! Milyen jelölések kapcsolódnak hozzá?**

Ha  $A$  halmaz, akkor  $A$  *hatványhalmaza* egy olyan halmazrendszer, melynek elemei  $A$  részhalmazai. Jele:  $\mathcal{P}(A)$

**22. Definiálja a rendezett pár fogalmát és koordinátáit!**

Bármely  $x, y$  esetén  $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Az  $(x, y)$  rendezett pár első koordinátája  $x$ , a második  $y$ .

**23. Definiálja két halmaz Descartes-szorzatát!**

$X, Y$  halmaz

$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$  rendezett párokból álló halmaz  $X$  és  $Y$  Descartes-szorzata.

**24. Definiálja a binér reláció fogalmát, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket!**

$R$  reláció minden eleme egy rendezett pár.

Jelölések:  $(x, y) \in R$  vagy  $xRy$  ( $x$  és  $y$  között fennáll az  $R$  reláció)

**25. Adjon három példát binér relációra!**

1.  $\emptyset$
2.  $\mathbb{I}_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$
3.  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$

**26. Mit jelent az, hogy  $R$  reláció  $X$  és  $Y$  között? Mit jelent az, hogy  $R$  egy  $X$ -beli reláció?**

$R$  reláció  $X$  és  $Y$  halmaz között:  $R \subseteq X \times Y$

Ha  $X = Y$ , akkor  $R$  egy  $X$ -beli *homogén binér reláció*.

**27. Definiálja a binér reláció értelmezési tartományát és értékkészletét, illetve adja meg a kapcsolódó jelöléseket!**

$X, Y$  halmaz,  $R \subseteq X \times Y$

$R$  reláció *értelmezési tartománya*:

$$\text{dmn}(R) := \{x \in X \mid \exists y \in Y : xRy\}$$

$R$  reláció *értékkészlete*:

$$\text{rng}(R) := \{y \in Y \mid \exists x \in X : xRy\}$$

**28. Definiálja binér reláció kiterjesztését, leszűkítését, leszűkítését egy halmazra!**

$S, R$  binér reláció,  $A$  halmaz

$S \subseteq R$  esetén  $S$  az  $R$  leszűkítése, vagy  $R$  az  $S$  kiterjesztése.

$R$  reláció leszűkítése  $A$  halmazra:  $R|_A := \{(x, y) \in R \mid x \in A\}$

**29. Definiálja egy binér reláció inverzét!**

$R$  binér reláció

$$R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

**30. Definiálja halmaz képét és inverz képét binér relációnál, illetve adja meg a kapcsolódó jelöléseket!**

$R$  binér reláció,  $A$  halmaz

$A$  halmaz képe:  $R(A) := \{y \mid \exists x \in A : (x, y) \in R\}$

$A$  halmaz inverz képe:  $R^{-1}(A) := \{y \mid \exists x \in A : (y, x) \in R\}$

**31. Definiálja binér relációk kompozícióját! Lehet-e a kompozíció üres?**

$R, S$  binér relációk

$R$  és  $S$  kompozíciója:  $R \circ S := \{(x, y) \mid \exists z : zRy \wedge xSz\}$

$A$  kompozíció akkor üres, ha  $\text{dmn}(R)$  és  $\text{rng}(S)$  diszjunkt.

**32. Fogalmazzon meg két binér reláció kompozíciójára vonatkozó állítást!**

$R, S, T$  binér relációk

1.  $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$  (asszociatív)

2.  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

**33. Mit jelent az, hogy egy reláció tranzitív, szimmetrikus, illetve dichotom? Ezek közül melyek azok, amik csak a reláción múlnak?**

$X$  halmaz,  $R$  binér reláció

tranzitív:  $\forall x, y, z ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$

szimmetrikus:  $\forall x, y ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

dichotom:  $\forall x, y \in X$ -re  $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$  igaz

$A$  tranzitivitás és a szimmetria csak a reláción múlik.

**34. Mit jelent az, hogy egy reláció antiszimmetrikus, illetve trichotom? Ezek közül melyek azok, amik csak a reláción múlnak?**

$X$  halmaz,  $R$  binér reláció

antiszimmetrikus:  $\forall x, y ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y$

trichotom:  $\forall x, y \in X (x = y \oplus (x, y) \in R \oplus (y, x) \in R)$

Az antiszimmetria csak a reláción múlik.

**35. Mit jelent az, hogy egy reláció szigorúan antiszimmetrikus, reflexív, illetve irreflexív? Ezek közül melyek azok, amik csak a reláción múlnak?**

$X$  halmaz,  $R$  binér reláció

szigorúan antiszimmetrikus:  $\forall x, y ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$

reflexív:  $\forall x \in X : (x, x) \in R$

irreflexív:  $\forall x \in X : (x, x) \notin R$

Az szigorú antiszimmetria csak a reláción múlik.

**36. Definiálja az ekvivalenciarelációt, illetve az osztályozás fogalmát!**

$X$  halmaz,  $R \subseteq X \times X$  reláció ekvivalenciareláció, ha tranzitív, szimmetrikus és reflexív.  $X$  részhalmazainak egy  $\mathcal{O}$  rendszerét  $X$  osztályozásának nevezzük, ha  $\mathcal{O}$  páronként diszjunkt nem üres halmazokból álló halmazrendszer, melyre  $\cup \mathcal{O} = X$

**37. Mi a kapcsolat az ekvivalenciarelációk és az osztályozások között?**

Minden  $X$  halmazon értelmezett ekvivalenciarelációhoz ( $\sim$ ) létezik egy  $\mathcal{O} = \{\tilde{x} \mid x \in X\}$  osztályozás, ahol  $\tilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$

Másfelől minden osztályozás megad egy ekvivalenciarelációt:  $R = \cup \{Y \times Y : Y \in \mathcal{O}\}$

**38. Definiálja a részbenrendezés, illetve a részbenrendezett halmaz fogalmát! Mit mondhatunk egy részbenrendezett halmaz egy részhalmazáról?**

Ha egy  $X$  halmazbeli reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, akkor *részbenrendezésnek* nevezzük. Jelölés:  $\leq$

A *részbenrendezett halmaz* tulajdonképpen a  $(X, \leq)$  pár.  $X$  részbenrendezett halmaz  $Y$  részhalmaza is részbenrendezett.

**39. Definiálja a (teljes) rendezés fogalmát!**

Ha a  $\leq$  részbenrendezési reláció dichotom is, azaz, ha  $X$  bármely két eleme összehasonlítható, akkor *rendezésnek* nevezzük.

**40. Mondjon példát részbenrendezett, de nem rendezett halmazra!**

$n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n|m$  reláció.

**41. Definiálja egy relációnak megfelelő szigorú, illetve gyenge reláció fogalmát!**

$R \subseteq X \times X$

$S$  az  $R$ -nek megfelelő *szigorú reláció*:  $xRy \wedge x \neq y \Rightarrow xSy$ , ahol  $S \subseteq X \times X$

$T$  az  $R$ -nek megfelelő *gyenge reláció*:  $xRy \vee x = y \Rightarrow xTy$ , ahol  $T \subseteq X \times X$

**42. Definiálja a szigorú részbenrendezést, és fogalmazza meg a kapcsolatát a részbenrendezéssel!**

Ha  $<$  egy  $X$ -beli *szigorú részbenrendezés*, amin egy tranzitív, szigorúan antiszimmetrikus (tehát irreflexív is) relációt értünk, akkor a megfelelő gyenge reláció egy részbenrendezés ( $\leq$ ).

**43. Definiálja az intervallumokat, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket!**

$X$  egy részbenrendezett halmaz

Ha  $z \geq x$  és  $z \leq y$ , akkor  $z$  az  $x$  és  $y$  közé esik. Az ilyen elemek halmazát  $[x, y]$ -al jelöljük.

Ha  $z > x$  és  $z < y$ , akkor  $z$  szigorúan az  $x$  és  $y$  közé esik. Az ilyen elemek halmazát  $]x, y[$  vagy  $(x, y)$  jelöli.

Az  $]x, y[$  és az  $]x, y]$  értelmezése analóg. Itt használatos a  $[x, y)$ , illetve a  $(x, y]$  jelölés is.

A fenti halmazok közös néven *intervallumok*.

**44. Definiálja a kezdőszelet fogalmát, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket!**

$X$  részbenrendezett halmaz

Egy  $x \in X$  elemhez tartozó kezdőszeletnek a  $\{y \in X \mid y < x\}$  részhalmazt nevezzük.

Ennek jelölése:  $] \leftarrow, x[$  ( $A ] \leftarrow, x[$ ,  $]x, \rightarrow[$ ,  $[x, \rightarrow[$  jelölések analóg értelmezendők)

**45. Definiálja a legkisebb és legnagyobb elem fogalmát!**

$X$  részbenrendezett halmaz

*legkisebb elem*:  $x \in X$ ,  $\forall y \in X$ -re  $x \leq y$

*legnagyobb elem*:  $x \in X$ ,  $\forall y \in X$ -re  $x \geq y$

Nem biztos, hogy léteznek ilyen elemek, de ha igen, akkor egyértelmű.

**46. Definiálja a minimális és a maximális elem fogalmát, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket!**

$X$  részbenrendezett halmaz

$x \in X$ -et *minimálisnak* nevezzük, ha nincs nála kisebb, *maximálisnak* pedig, ha nincs nála nagyobb elem.

Ha  $X$ -nek  $\exists!$  minimális eleme, akkor azt  $\min X$ -szel, ha pedig  $\exists!$  maximális eleme azt  $\max X$ -szel jelöljük.

**47. Adjon meg egy olyan részbenrendezett halmazt, melyben több minimális elem van!**

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 10\}$$

$R = \{(x, y) \in X^2 : x|y\}$  relációban a 2, 3 és az 5 minimális.

**48. Adjon meg olyan részbenrendezett halmazt, melyben nincs maximális elem!**  
Ilyen halmaz például a természetes számok halmaza ( $\mathbb{N}$ ).

**49. Definiálja az alsó és felső korlát fogalmát!**

$X$  részbenrendezett halmaz,  $Y \subseteq X$ ,  $x \in X$

$\forall y \in Y : y \leq x \Rightarrow x$  felső korlátja  $Y$ -nak

$\forall y \in Y : y \geq x \Rightarrow x$  alsó korlátja  $Y$ -nak

**50. Definiálja az alsó és a felső határ tulajdonságot!**

$X$  részbenrendezett halmaz

$\emptyset \neq S \subseteq X$  felülről korlátos, és van felső korlátja  $\Rightarrow S$  felső határ tulajdonságú.

$\emptyset \neq S \subseteq X$  alulról korlátos, és van alsó korlátja  $\Rightarrow S$  alsó határ tulajdonságú.

**51. Definiálja az infimum és a szuprémum fogalmát!**

$X$  részbenrendezett halmaz,  $Y \subseteq X$

Ha  $Y$  alulról korlátos, és az alsó korlátok halmazában van legnagyobb elem, akkor azt  $Y$  infimumának nevezzük. Jele:  $\inf Y$

Ha  $Y$  felülről korlátos, és a felső korlátok halmazában van legkisebb elem, akkor azt  $Y$  szuprémumának nevezzük. Jele:  $\sup Y$

**52. Definiálja a jólrendezés és a jólrendezett halmaz fogalmát!**

Egy  $X$  rendezett halmazt jólrendezettnek, a rendezését pedig jólrendezésnek nevezzük, ha  $X$  bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

**53. Adjon meg egy olyan rendezett halmazt, ami nem jólrendezett!**

$\mathbb{Z}$ , mivel a negatív számokból álló részhalmaznak nincs legkisebb eleme vagy a

$\mathbb{R}$ , mivel például a  $]0, 1[$  intervallumnak nincs legkisebb eleme.

**54. Adjon példát jólrendezett halmazra!**

$\mathbb{N}$

**55. Definiálja a függvény fogalmát, és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket!**

Egy  $f$  reláció függvény, ha  $\left( (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y' \right)$ .

Jelölések:  $\forall x \in \text{dmn}(f)$ -re  $f(x) = y$ ,  $f : x \mapsto y$  (az  $f$  függvény  $x$  helyen felvett  $y$  értéke),  
 $f : X \rightarrow Y$  ( $X$  halmazt  $Y$ -ba képező  $f$  függvény)

**56. Mi a különbség az  $f \in X \rightarrow Y$  és a  $f : X \rightarrow Y$  között?**

$f \in X \rightarrow Y$  esetén  $\text{dmn}(f) \subset X$ , míg

$f : X \rightarrow Y$  esetén  $\text{dmn}(f) = X$

**57. Mikor nevezünk egy függvényt kölcsönösen egyértelműnek?**

Egy  $f$  függvény kölcsönösen egyértelmű (injektív), ha  $(f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x' \Leftrightarrow f^{-1}$  reláció is függvény.

**58. Definiálja a permutáció fogalmát!**

Egy  $X$  halmaz önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezéseit az  $X$  permutációjának nevezzük.

**59. Igaz-e, hogy két függvény összetétele is függvény?**

Igaz, ha  $f$  és  $g$  függvény, akkor  $g \circ f$  is az.

**60. Mikor állítjuk, hogy két függvény összetétele injektív, szürjektív, illetve bijektív?**

Ha  $f$  és  $g$  injektív, akkor  $g \circ f$  is.

Ha  $f : X \rightarrow Y$  és  $g : Y \rightarrow Z$  szürjektívek, akkor  $g \circ f : X \rightarrow Z$  is szürjektív.

Ha  $f$  és  $g$  bijektív, akkor  $g \circ f$  is.

**61. Mikor nevezünk egy függvényt monoton növekedőnek, illetve monoton csökkenőnek?**

$X, Y$  részbenrendezett halmazok,  $f : X \rightarrow Y$

monoton növekedő, ha  $x, y \in X$ ,  $x \leq y$  esetén  $f(x) \leq f(y)$ , és

monoton csökkenő, ha  $x, y \in X$ ,  $x \leq y$  esetén  $f(x) \geq f(y)$ .

**62. Mikor nevezünk egy függvényt szigorúan monoton növekedőnek, illetve szigorúan monoton csökkenőnek?**

$X, Y$  részbenrendezett halmazok,  $f : X \rightarrow Y$

szigorúan monoton növekedő, ha  $x, y \in X$ ,  $x < y$  esetén  $f(x) < f(y)$ , és

szigorúan monoton csökkenő, ha  $x, y \in X$ ,  $x < y$  esetén  $f(x) > f(y)$ .

**63. Mi a kapcsolat a szigorúan monoton növekedő és az injektív függvények között?**

Ha  $X, Y$  rendezett halmaz, akkor egy  $f : X \rightarrow Y$  szigorúan monoton függvény injektív is.

**64. Mit értünk indexhalmaz, indexelt halmaz és indexelt család alatt?**

$f$  függvény  $i$  helyen felvett értékét  $f_i$ -vel jelöljük. Ilyenkor a függvény  $I$  értelmezési tartományát *indexhalmaznak*, értékészletét pedig *indexelt halmaznak*, a függvényt pedig *indexelt családnak* nevezzük.

**65. Definiálja az indexelt halmazcsaládokra vonatkozó De Morgan-szabályokat!**

$X_i, i \in I \neq \emptyset$  az  $X$  részhalmazainak indexelt családja. Ekkor az  $X$ -re vonatkozó komplementer:

$$\begin{aligned} \overline{(\cup_{i \in I} X_i)} &= \cap_{i \in I} \overline{X_i} \\ \overline{(\cap_{i \in I} X_i)} &= \cup_{i \in I} \overline{X_i} \end{aligned}$$

**66. Definiálja a binér, unér és nullér műveletek fogalmát, továbbá ismertesse a kapcsolódó jelöléseket!**

$X$  egy halmaz

$X$ -beli *binér művelet*en egy  $* : X \times X \rightarrow X$  leképezést értünk,

$X$ -beli *unér művelet*en egy  $* : X \rightarrow X$  leképezést értünk, míg

*nullér művelet*en  $* : \{\emptyset\} \rightarrow X$  leképezést értünk, ami tulajdonképp  $X$  egy elemének a kijelölése.

**67. Adjon meg egy binér műveletet táblázattal!**

Binér logikai műveletek, például:  $\wedge$  (és),  $\Rightarrow$  (implikáció).

$\wedge$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\Rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

**68. Hogyan definiálunk műveleteket függvények között?**

$X$  halmaz,  $Y$  halmaz a  $*$  binér művelettel

$$(f * g)(x) = \forall x \in X (f(x) * g(x)), \text{ ha } f, g : X \rightarrow Y$$

Hasonlóan definiálhatók unér és nullér műveletek függvényeken.

**69. Definiálja a művelettartó leképezés fogalmát!**

$*$  binér művelet az  $X$  halmazon,  $*'$  binér művelet az  $X'$  halmazon

$\varphi : X \rightarrow X'$  leképezés *művelettartó*, ha  $\forall x, y \in X$ -re

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) *' \varphi(y)$$

**70. Adjon példát művelettartó leképezésre!**

$X = X' = \mathbb{R}$

$*$  =  $*'$  = szorzás

$\varphi : x \rightarrow x^2$  művelettartó, mert  $(xy)^2 = x^2y^2$

**71. Fogalmazza meg a rekurziótételt!**

$X$  egy halmaz,  $a \in X$ ,  $f : X \rightarrow X$  függvény és  $\mathbb{N}$ -en teljesülnek a Peano-axiómák, akkor  $\exists! g : \mathbb{N} \rightarrow X$  függvény, amelyre  $\forall n \in \mathbb{N} (g(0) = a \wedge g(n^+) = f(g(n)))$ .

**72. Definiálja a karakterisztikus függvény fogalmát, és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket!**

$X, Y$  halmaz,  $Y \subseteq X$ . Ekkor  $Y$  karakterisztikus függvénye:

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in X \setminus Y \\ 1, & \text{ha } x \in Y \end{cases}$$

**73. Definiálja a bal és jobb oldali semleges elem, illetve a semleges elem fogalmát!**

$G$  halmaz,  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$

Ha  $s \in G$  és  $\forall g \in G (s * g = g)$ , akkor  $s$  *bal oldali semleges elem*.

Ha  $s \in G$  és  $\forall g \in G (g * s = g)$ , akkor  $s$  *jobb oldali semleges elem*.

Ha  $s$  bal és jobb oldali semleges elem is, akkor  $s$  *semleges elem*.

**74. Definiálja a félcsoport, a balinverz, a jobbinverz és az inverz fogalmát, továbbá ismertesse a kapcsolódó jelöléseket!**

$G$  halmaz,  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$

Ha  $*$  asszociatív, akkor a  $(G, *)$  grupoid *félcsoport*.

Ha  $(G, *)$  félcsoportban van semleges elem, tehát  $(G, *)$  monoid, akkor  $g, g^* \in G$ ,  $s$  semleges elem, illetve

$g * g^* = s$  esetén  $g$  a  $g^*$  *balinverze*,  $g^*$  pedig a  $g$  *jobbinverze*.

Ha  $g^*$  a  $g$  bal- és jobbinverze, akkor  $g^*$  *inverz*.

**75. Igaz-e, hogy egy egységelemes multiplikatív félcsoportban, ha h-nak és g-nek van inverze, akkor h · g-nek is, és ha igen, mi?**

Igaz, ha h-nak  $h^*$ , g-nek  $g^*$  az inverze, akkor  $h \cdot g$  inverze  $g^* \cdot h^*$ .

**76. Definiálja a csoport és az Abel-csoport fogalmát!**

$G$  halmaz,  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$

$(G, *)$  *csoport*, ha  $(G, *)$  grupoidban a  $*$  asszociatív, van semleges elem, továbbá  $G$  minden elemének létezik inverze.

$(G, *)$  csoport *Abel-csoport*, ha  $*$  kommutatív.

**77. Igaz-e, hogy ha  $X$  tetszőleges halmaz, akkor  $(\mathcal{P}(X), \cap)$  egy egységelemes félcsoporth?**

Igaz, egységelemes kommutatív félcsoporth, ahol az egységelem maga az  $X$ .

**78. Igaz-e, hogy ha  $X$  tetszőleges halmaz, akkor  $(\mathcal{P}(X), \cup)$  egy csoporth?**

Nem, egységelemes ( $\emptyset$  az egységelem) kommutatív félcsoporth.

**79. Igaz-e, hogy ha  $X$  tetszőleges halmaz, akkor  $(\mathcal{P}(X), \Delta)$  egy félcsoporth?**

Igaz, Abel-csoport, mivel az inverz a komplementer, az egységelem pedig az  $\emptyset$ .

**80. Igaz-e, ha  $X$  tetszőleges halmaz, akkor az  $X$ -beli binér relációk a kompozíció művelettel egységelemes félcsoporthot alkotnak?**

Igaz, mivel a kompozíció művelet asszociatív ( $R, Q, S$  relációkra  $(R \circ Q) \circ S = R \circ (Q \circ S)$ ), az egységelem pedig  $\mathbb{I}_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ , mivel  $\forall R \subseteq X \times X$ -re  $R \circ \mathbb{I}_X = \mathbb{I}_X \circ R = R$ .

**81. Igaz-e, ha  $X$  tetszőleges halmaz, akkor az  $X$ -et  $X$ -re képező bijektív leképezések a kompozíció művelettel csoporthot alkotnak?**

Igaz, a bijektív leképezések csoporthot alkotnak, mivel a bijekció injektív, és az injektív leképezéseknek van inverze.

**82. Fogalmazza meg a természetes számokra a  $\leq$  reláció és a műveletek kapcsolatát leíró tételt!**

$n, m, k \in \mathbb{N}$

$n \leq m \Leftrightarrow n + k \leq m + k$

$k \neq 0$  esetén  $n \leq m \Leftrightarrow n \cdot k \leq m \cdot k$

**83. Definiálja a véges sorozatokat!**

Ha  $n \in \mathbb{N}$ , akkor a  $[0, n] \subseteq \mathbb{N}$  vagy  $[1, n] \subseteq \mathbb{N}^+$  halmazon értelmezett függvényeket véges sorozatnak nevezzük.

**84. Fogalmazza meg az általános rekurziótételt!**

$X$  halmaz,  $f$  egy  $X$ -be képező függvény, ahol  $\text{dmn}(f) \subseteq \mathbb{N}$  valamely kezdőszeletéből  $X$ -be képező függvények halmaza.

Ekkor  $\exists ! g : \mathbb{N} \rightarrow X$ , amely „f-zárt”, tehát  $\forall a \in \mathbb{N} (g(a) = f(g|_{\{1, \dots, a\}}))$

**85. Definiálja véges sok elem szorzatát félcsoporthban és egységelemes félcsoporthban!**

$G$  egy multiplikatív félcsoporth,  $x : \mathbb{N} \rightarrow G$

Az általános rekurziótételt alkalmazva definiálhatjuk a

$\prod_{k=1}^n x_k$  szorzatokat úgy, hogy  $\prod_{k=1}^1 x_k = x_1$  és  $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = \left( \prod_{k=1}^n x_k \right) \cdot x_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

Ha  $G$  egységelemes multiplikatív félcsoporth  $e$  egységelemmel, akkor érdemes úgy megállapodni, hogy

$\prod_{k=1}^0 x_k = e$

**86. Hogyan értelmezzük a  $\sum_{a \in A} x_a$  jelölést?**

Ha  $G$  félcsoporth,  $A$  halmaz,  $x : A \rightarrow G$  függvény,  $n \in \mathbb{N}^+$  és  $\exists \varphi : \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\} \rightarrow A$  injektív leképezés, akkor minden ilyen leképezésre  $\sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}$  ugyan az. Ez az *általános kommutativitás tétele*, és ezt a közös értéket jelöltük  $\sum_{a \in A} x_a$ -val.

**87. Definiálja a nullgyűrű és a zérógyűrű fogalmát!**

A *nullgyűrű* egy olyan gyűrű, ami csak 1 elemet tartalmaz, és ez a 0.

A *zérógyűrű* additív Abel-csoport, amelyben bármely két elem szorzata 0.

**88. Definiálja a bal és jobb oldali nullosztó és a nullosztópár fogalmát!**

$R$  gyűrű,  $x, y \neq 0$  és  $x, y \in R$

Ha  $xy = 0 \Rightarrow x$  és  $y$  *nullosztópár*. Itt  $x$  a *bal*, míg  $y$  a *jobb oldali nullosztó*.

**89. Definiálja az integritási tartomány fogalmát!**

Kommutatív nullosztómentes gyűrűt *integritási tartománynak* nevezünk.

**90. Definiálja a rendezett integritási tartomány fogalmát!**

Egy  $R$  rendezett halmaz *rendezett integritási tartomány*, ha integritási tartomány, és az alábbi feltételek fennállnak:

1.  $x, y, z \in R(x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$  (összeadás monoton)
2.  $x, y \in R(x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0)$  (szorzás monoton)

**91. Fogalmazza meg a szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy integritási tartomány rendezett integritási tartomány legyen!**

$R$  integritási tartomány *rendezett integritási tartomány*  $\Leftrightarrow$  ha alaphalmaza rendezett, és az alábbi feltételek fennállnak:

1.  $x, y, z \in R(x < y \Rightarrow x + z < y + z)$  (összeadás szigorúan monoton)
2.  $x, y \in R(x, y > 0 \Rightarrow xy > 0)$  (szorzás szigorúan monoton)

**92. Fogalmazza meg a rendezett integritási tartományokban az egyenlőtlenségekkel való számolás szabályait leíró tételt!**

$R$  rendezett integritási tartomány,  $x, y, z \in R$

1.  $x > 0 \Rightarrow -x < 0$ , és  $x < 0 \Rightarrow -x > 0$
2.  $(x < y \wedge z > 0) \Rightarrow xz < yz$
3.  $(x < y \wedge z < 0) \Rightarrow xz > yz$
4.  $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$
5. Ha 1 semleges elem,  $0 < x < y$  és  $x, y$ -nak van multiplikatív inverze, akkor  $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

**93. Definiálja a test fogalmát, és adjon három példát testre!**

$F$  gyűrűt *testnek* nevezzük, ha a nullelemet 0-val jelölve  $F \setminus \{0\}$  a szorzással Abel-csoportot alkot. Ilyen például:  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

**94. Definiálja a rendezett test fogalmát, és adjon példát olyan testre, mely nem tehető rendezett testté!**

Ha egy test rendezett integritási tartomány, akkor *rendezett testnek* nevezzük.  $\mathbb{C}$  nem tehető rendezett testté.

**95. Fogalmazza meg az arkhimédieszi tulajdonságot!**

$F$  rendezett test *arkhimédieszien rendezett*, ha  $x, y \in F(x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}(nx \geq y))$

**96. Mi a kapcsolata az arkhimédieszi tulajdonságnak a felső határ tulajdonsággal? Egy felső határ tulajdonságú rendezett test mindig arkhimédieszien rendezett.**

**97. Fogalmazza meg a racionális számok felső határ tulajdonságára és az arkhimédieszi tulajdonságra vonatkozó tételt!**

A  $\mathbb{Q}$  számok rendezett teste arkhimédieszien rendezett, de nem felső határ tulajdonságú.

**98. Fogalmazza meg a valós számok egyértelműségét leíró tételt!**

$\mathbb{R}'$  és  $\mathbb{R}''$  két felső határ tulajdonságú rendezett test. Ekkor  $\exists \varphi : \mathbb{R}' \rightarrow \mathbb{R}''$  injektív leképezés, mely monoton növekvő, illetve összeadás- és szorzástartó.

**99. Definiálja a bővített valós számokat!**

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . A  $\mathbb{R}$  számok rendezésének kiterjesztése  $\overline{\mathbb{R}}$ -ra:  $-\infty < x < +\infty$

Ellentett képzése:  $-(+\infty) = -\infty$  és  $-(-\infty) = +\infty$

Összeadás:  $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$ , ha  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ , és  $x > -\infty$

$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$ , ha  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ , és  $x < +\infty$

A  $(+\infty) + (-\infty)$  és a  $(-\infty) + (+\infty)$  nincs értelmezve.

**100. Fogalmazza meg a valós számok létezését leíró tételt!**

Létezik felső határ tulajdonságú rendezett test.

**101. Definiálja a komplex számok halmazát a műveletekkel!**

A komplex számok halmaza  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , azaz rendezett valós számpárok halmaza az

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$  összeadással,

és a  $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$  szorzással, mint műveletekkel.

**102. Adja meg a  $\mathbb{R}$  beágyazását  $\mathbb{C}$ -be!**

$x, x' \in \mathbb{R}$

1.  $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$

2.  $(x, 0) \cdot (x', 0) = (xx', 0)$

Emiatt az  $x \mapsto (x, 0)$  injektív, összeadás- és szorzástartó leképezése  $\mathbb{R}$ -nek  $\mathbb{C}$ -be, így

$$\mathbb{R} = \{(x, 0) \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

**103. Definiálja  $i$ -t, komplex szám valós és képzetes részét, konjugáltját és a képzetes számok fogalmát!**

$(0, 1)$  komplex számot jelölje  $i$ . Ennek segítségével tetszőleges  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b)$  komplex szám átírható  $a + bi$  alakba (algebrai alak).  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  esetén  $z$  képzetes része  $b$  (jele:  $\text{Im}(z) = b$ ), illetve valós része  $a$  (jele:  $\text{Re}(z) = a$ ).

$z$  konjugáltja a  $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$  komplex számmal egyenlő.

Ha  $\text{Re}(z) = 0$ , akkor  $z$  képzetes szám.

**104. Fogalmazza meg a komplex konjugálás tulajdonságait!**

Definíció alapján következnek a következő összefüggések:

1.  $\overline{\bar{z}} = z$

4.  $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$

6.  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

2.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

5.  $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)i$

3.  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot w$

**105. Definiálja a komplex szám abszolút értékét! Milyen tételt használt?**

$(x, y) \in \mathbb{C}$

Felhasznált tétel: Pitagorasz-tétel

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

**106. Fogalmazza meg a komplex számok abszolútértékének tulajdonságait!**

$z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$

1.  $z\bar{z} = |z|^2$

5.  $|\bar{z}| = |z|$

2.  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , ha  $z \neq 0$

6.  $|zw| = |z||w|$

7.  $|\text{Re}(z)| \leq |z|$

3.  $|(x, 0)| = |x|$

8.  $|\text{Im}(z)| \leq |z|$

4.  $|0| = 0$  és  $z \neq 0 \Rightarrow |z| > 0$

9.  $|z + w| \leq |z| + |w|$

10.  $||z| - |w|| \leq |z - w|$

**107. Definiálja a komplex számokra a sgn függvényt, és fogalmazza meg tulajdonságait!**

$$z \in \mathbb{C} \quad \text{Tulajdonságai:}$$

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z = 0 \\ \frac{z}{|z|}, & \text{ha } z \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{sgn}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sgn}(z)} \\ |\operatorname{sgn}(z)| = 1, \text{ ha } z \neq 0 \end{cases}$$

**108. Definiálja a komplex számok trigonometrikus alakját és argumentumát!**

$$0 \neq z \in \mathbb{C}$$

$\exists t \in \mathbb{R} (\operatorname{sgn}(z) = \cos t + i \sin t)$ . Ha ez az összefüggés fennáll, akkor a  $t + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$  számokra is, és csak ezekre. Ha  $z = 0$ , akkor bármely  $t \in \mathbb{R}$  választható. Ilyenkor a  $z$  trigonometrikus alakja  $z = |z|(\cos t + i \sin t)$ . A  $z$  argumentuma (jele:  $\arg(z)$ ) az a  $t \in \mathbb{R}$ , amelyre  $-\pi < t \leq \pi$  és  $z = |z|(\cos t + i \sin t)$

**109. Írja fel két komplex szám szorzatát és hányadosát trigonometrikus alakjuk segítségével!**

$$z, w \in \mathbb{C}, t = \arg(z), s = \arg(w)$$

$$zw = |z|(\cos t + i \sin t) \cdot |w|(\cos s + i \sin s) = |zw|(\cos(s+t) + i \sin(s+t))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{|z|}{|w|} \left( \cos(t-s) + i \sin(t-s) \right), \text{ ha } w \neq 0$$

**110. Ha  $n \in \mathbb{N}^+$  és  $w \in \mathbb{C}$ , írja fel a  $z^n = w$  egyenlet összes megoldását!**

$w = 0$  esetén  $z = 0$ , különben, ha  $t = \arg(w)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \left( \frac{t + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{t + 2k\pi}{n} \right) \right), k = [0, n-1]$$

különböző komplex számok, amelyek  $n$ -edik hatványa  $w$ .

**111. Írja fel az  $n$ -edik komplex egységgyököket. Mit értünk primitív  $n$ -edik egységgyökök alatt?**

Speciálisan, ha  $w = 1$ , akkor az  $\varepsilon^n = 1$  feltételnek az alábbi komplex számok tesznek eleget:

$$\varepsilon_k = \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2k\pi}{n} \right), k = [0, n-1]$$

Ezeket  $n$ -edik komplex egységgyököknek nevezzük.

Az  $n$ -edik primitív egységgyökök hatványaiként az összes többi egységgyök előáll.

**112. Ha  $n \in \mathbb{N}^+$  és  $w \in \mathbb{C}$ , írja fel a  $z^n = w$  egyenlet összes megoldását az  $n$ -edik egységgyök segítségével!**

$$z_k = z \varepsilon_k, \text{ ahol } k = [0, n-1]$$

**113. Fogalmazza meg az algebra alaptételét!**

Ha  $n \in \mathbb{N}^+$ , valamint  $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}, c_n \neq 0$ , akkor  $\exists z \in \mathbb{C}$ , amelyre  $\sum_{k=0}^n c_k z^k = 0$ .

**114. Definiálja a halmazok ekvivalenciáját, és sorolja fel tulajdonságait!**

Tetszőleges  $X, Y$  halmazok ekvivalensek, ha  $\exists \varphi : X \rightarrow Y$  bijekció. Jelölése:  $X \sim Y$ .

Tulajdonságai:

1.  $X \sim X$  (reflexív)
2.  $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$  (szimmetrikus)
3.  $(X \sim Y \wedge Y \sim Z) \Rightarrow X \sim Z$  (tranzitív)

**115. Ha az  $X$  és  $X'$  illetve  $Y$  és  $Y'$  halmazok ekvivalensek, milyen más halmazok ekvivalenciájára következtethetünk?**

$X \times Y$  és  $X' \times Y'$  is ekvivalens.

**116. Definiálja a véges és végtelen halmazok fogalmát!**

$X$  halmaz véges, ha valamely  $n \in \mathbb{N}$  számra ekvivalens a  $\{1, 2, \dots, n\}$  halmazzal, egyébként végtelen.

**117. Definiálja egy véges halmaz elemeinek a számát! Hogyan jelöljük? Mit használt fel a definícióhoz?**

Az az egyértelműen meghatározott  $n \in \mathbb{N}$ , melyre adott  $X$  véges halmaz ekvivalens  $\{1, 2, \dots, n\}$ -nel, az  $X$  halmaz elemeinek a száma. Jele:  $\#(X)$ ,  $\text{card}(X)$ ,  $|X|$

A definícióhoz felhasználtuk, hogy minden véges halmaz legfeljebb egy  $n$ -re ekvivalens  $\{1, 2, \dots, n\}$  halmazzal.

**118. Fogalmazza meg a véges halmazok és elemszámuk tulajdonságait leíró tételt!**  
 $X, Y$  halmazok

1.  $X$  véges és  $Y \subseteq X \Rightarrow Y$  is véges, és  $\#(Y) \leq \#(X)$
2.  $X$  véges és  $Y \subset X \Rightarrow Y$  is véges, és  $\#(Y) < \#(X)$
3.  $X, Y$  véges és diszjunkt  $\Rightarrow X \cup Y$  is véges, és  $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$
4.  $X, Y$  véges  $\Rightarrow \#(X \cup Y) + \#(X \cap Y) = \#(X) + \#(Y)$
5.  $X, Y$  véges  $\Rightarrow X \times Y$  is véges, és  $\#(X \times Y) = \#(X) \cdot \#(Y)$
6.  $X, Y$  véges  $\Rightarrow X^Y$  is véges, és  $\#(X^Y) = \#(X)^{\#(Y)}$
7.  $X$  véges  $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$  is véges, és  $\#(\mathcal{P}(X)) = 2^{\#(X)}$
8. ha  $X$  véges, és  $f : X \rightarrow Y$  szürjektív, akkor  $Y$  is véges,  $\#(Y) \leq \#(X)$ , és ha  $f$  nem injektív, akkor  $\#(Y) < \#(X)$

**119. Fogalmazza meg a skatulyaelvet!**

$X, Y$  véges halmazok,  $\#(X) > \#(Y)$ , akkor egy  $f : X \rightarrow Y$  leképezés nem lehet injektív.

**120. Mit mondhatunk egy véges halmazban minimális és maximális elem létezéséről?**

Részbenrendezett halmaz bármely nem üres részhalmazának van *minimális* és *maximális* eleme.

**121. Mit mondhatunk véges halmaz összes permutációinak számáról?**

Egy véges  $n$  elemű halmaz *permutációinak száma*  $P_n = \prod_{k=1}^n k = n!$

$X$  véges halmaz permutációinak a száma csak  $\#(X)$ -től függ.

**122. Mit értünk véges halmaz variációin, és mit mondhatunk az összes variációk számáról?**

$\{1, 2, \dots, k\}$ -t  $A$ -ba képező injektív leképezéseket az  $A$   $k$ -ad osztályú *variációinak* nevezzük.

Ha  $\#(A) = n$ , akkor számuk  $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

**123. Definiálja az ismétléses variációk fogalmát! Mit mondhatunk egy véges halmaz összes ismétléses variációinak számáról?**

$\{1, 2, \dots, k\}$ -t  $A$ -ba képező leképezéseket az  $A$   $k$ -ad osztályú *ismétléses variációinak* nevezzük. Ha  $\#(A) = n$ , akkor  $V_n^{k,i} = n^k$

**124. Mit értünk egy véges halmaz kombinációin, és mit mondhatunk az összes kombinációk számáról?**

A halmaz  $k \in \mathbb{N}$  elemű részhalmazait az  $A$  halmaz  $k$ -ad osztályú kombinációinak nevezzük.

Ha  $\#(A) = n$ , akkor  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

**125. Mit értünk egy véges halmaz ismétléses kombinációin, és mit mondhatunk el az összes ismétléses kombinációk számáról?**

A halmaz  $k$ -ad osztályú ismétléses kombinációi olyan  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  függvények, melyekre

$\sum_{a \in A} f(a) = k$  igaz.  $\#(A) = n$  esetén  $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$

**126. Mit értünk egy véges halmaz ismétléses permutációin, és mit mondhatunk az összes ismétléses permutáció számáról?**

Ha  $r, i_1, i_2, \dots, i_r \in \mathbb{N}$ , akkor az  $a_1, a_2, \dots, a_r$  különböző elemek  $i_1, i_2, \dots, i_r$  ismétlődésű ismétléses permutációi az olyan  $n = i_1 + i_2 + \dots + i_r$ -tagú szorzatok, amelyekben az  $a_j$  elem

$i_j$ -szer fordul elő. Ezek száma  $P_n^{i_1, i_2, \dots, i_r} = \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_r!}$

**127. Fogalmazza meg a binomiális tételt!**

$R$  kommutatív egységelemes gyűrű,  $x, y \in R$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

**128. Írja fel a Pascal-háromszög első 8 sorát!**

0.				1				
1.			1	1				
2.		1	2	1				
3.		1	3	3	1			
4.		1	4	6	4	1		
5.	1	5	10	10	5	1		
6.	1	6	15	20	15	6	1	
7.	1	7	21	35	35	21	7	1

**129. Fogalmazza meg a polinomiális tételt!**

$R$  kommutatív egységelemes gyűrű,  $n, r \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_r \in R$ . Ekkor

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \in \mathbb{N}}} P_n^{i_1, i_2, \dots, i_r} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_r^{i_r}.$$

**130. Fogalmazza meg a logikai szita formulát!**

$X_1, X_2, \dots, X_k$  az  $X$  véges halmaz részhalmazai

$f : X \rightarrow Y$ , ahol  $Y$  Abel-csoport. Legyen

$$S = \sum_{x \in X} f(x)$$

$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k} \sum_{x \in (X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_r})} f(x) \text{ és legyen } S_0 = \sum_{x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^k X_i} f(x)$$

Ekkor  $S_0 = S - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^k S_k$

**131. Definiálja a természetes számok körében az oszthatóságot, és adja meg a jelöléseket!**

$m, n \in \mathbb{N}$ .  $m$ -et  $n$  osztójának, vagy  $n$ -t  $m$  többszörösének nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy  $n$  osztható  $m$ -el, ha  $\exists k \in \mathbb{N}(n = mk)$ . Jelölés:  $m|n$  ( $m$  osztója  $n$ -nek)

**132. Sorolja fel a természetes számok körében az oszthatóság alaptulajdonságait!**

$n, m \in \mathbb{N}$

- |  |   |
|--|---|
| 1. $(n m \wedge n' m') \Rightarrow nn' mm'$          | 6. $(k \in \mathbb{N}^+ \wedge mk nk) \Rightarrow m n$                    |
| 2. $\forall n \in \mathbb{N}(n 0)$                   | 7. $(m n_i \wedge k_i \in \mathbb{N}) \Rightarrow m \sum_{i=1}^j k_i n_i$ |
| 3. $0 n \Rightarrow n = 0$                           | 8. $(n \neq 0 \wedge m n) \Rightarrow m \leq n$                           |
| 4. $\forall n \in \mathbb{N}(1 n)$                   | 9. az $ $ reláció részbenrendezés   |
| 5. $\forall k \in \mathbb{N}(m n \Rightarrow mk nk)$ |   |

**133. Definiálja a természetes számok körében a prímszám és a törzsszám fogalmát! Mi a kapcsolat a két fogalom között?**

$k, m, n, p \in \mathbb{N}$

Ha  $n > 1$  csak  $1 \cdot n$  vagy  $n \cdot 1$  alakban írható fel természetes számok szorzataként, akkor  $n$  törzsszám (*irreducibilis*).

Ha  $p > 1$  és  $p|km$  (minden lehetséges  $km$  felbontásra) esetén  $p|k \vee p|m$ , akkor  $p$  prímszám. Minden prímszám törzsszám, és minden törzsszám prímszám.

**134. Definiálja egységelemes integritási tartományban az oszthatóságot, és adja meg a jelölését!**

$R$  egységelemes integritási tartomány,  $a, b \in R$

$a$  osztója  $b$ -nek, vagy  $b$  az  $a$  többszöröse, illetve  $b$  osztható  $a$ -val, ha  $\exists c \in R(b = ac)$ . Jelölése:  $a|b$

**135. Sorolja fel egységelemes integritási tartományban az oszthatóság alaptulajdonságait!**

$R$  egységelemes integritási tartomány,  $a, b, c \in R$

- |   |  |
|---|--|
| 1. $(a b \wedge a' b') \Rightarrow aa' bb'$ | 5. $a b \Rightarrow \forall c \in R(ac bc)$                      |
| 2. $\forall a \in R(a 0)$                   | 6. $(ac bc \wedge c \neq 0) \Rightarrow a b$                     |
| 3. $0 a \Rightarrow a = 0$                  | 7. $(a b_i \wedge c_i \in R) \Rightarrow a \sum_{i=1}^j c_i b_i$ |
| 4. $\forall a \in R(1 a)$ (1 egységelem)    | 8. az $ $ reláció reflexív és tranzitív                          |

**136. Definiálja az asszociáltak fogalmát, és sorolja fel ennek a kapcsolatnak a tulajdonságait!**

$R$  egységelemes integritási tartomány,  $a, b \in R$

Ha  $a|b \wedge b|a \Rightarrow a$  és  $b$  asszociáltak. Tulajdonságok:

Ez a reláció ekvivalenciareláció, és kompatibilis a szorzással.

A 0-nak csak önmaga az asszociáltja.

A  $|$  reláció kompatibilis ezzel az ekvivalenciarelációval, és az ekvivalenciaosztályokon tekintve részbenrendezést kapunk.

**137. Definiálja az egységek fogalmát, és sorolja fel az egységek halmazának tulajdonságait!**

Egy  $R$  egységelemes integritási tartományban 1 asszociáltjait egységeknek nevezzük, tehát az egységek  $R$  azon elemei, melyeknek  $\exists$  a szorzásra nézve inverzük. Tulajdonságok:

Az egységek  $R$  minden elemének osztói.

Az egységek a szorzásra nézve Abel-csoportot alkotnak.

**138. Mi a kapcsolat az egységek és az asszociáltak között?**

$R$  egységelemes integritási tartomány

$a \in R$  asszociáltjai a  $\varepsilon a$  alakú elemek, ahol  $\varepsilon$  egység.

**139. Mi a kapcsolat a  $\mathbb{N}$  és az  $\mathbb{Z}$  számok körében vett oszthatóság között?**

Ha  $a, b \in \mathbb{Z}$ , akkor  $|ab| = |a||b|$ .

$m|n$  akkor teljesül az  $\mathbb{Z}$  számok körében, ha  $|m||n|$  teljesül  $\mathbb{N}$ -ben.

**140. Definiálja egységelemes integritási tartományban a prímelem és az irreducibilis elem fogalmát! Mi a kapcsolat a két fogalom között?**

$R$  egységelemes integritási tartomány

$0 \neq a \in R$  *irreducibilis*, ha nem egység, és csak  $a = bc$  (ahol  $b$  vagy  $c$  egység,  $b, c \in R$ ) alakban írható fel.

$0 \neq p \in R$  *prímelem*, ha nem egység és  $p|ab$  ( $a, b \in R$ , minden lehetséges  $ab$ -re) esetén  $p|a \vee p|b$ .

Minden prímelem irreducibilis, de nem minden irreducibilis elem prímelem.

**141. Mit értünk egységelemes integritási tartományban legnagyobb közös osztó alatt?**

$R$  egységelemes integritási tartomány,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  elemeknek a  $b \in R$  elem *legnagyobb közös osztója*, ha  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén  $b|a_i$ , és ha  $b'|a_i \Rightarrow b'|b$ .

**142. Mikor mondjuk egységelemes integritási tartomány elemire, hogy relatív prímek?**

$R$  egységelemes integritási tartomány,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  *relatív prímek*, ha legnagyobb közös osztóik egységek.

**143. Mit értünk egységelemes integritási tartományban legkisebb közös többszörös alatt?**

$R$  egységelemes integritási tartomány,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  elemeknek a  $b \in R$  elem *legkisebb közös többszöröse*, ha  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén  $a_i|b$ , és ha  $a_i|b' \Rightarrow b|b'$ .

**144. Egyértelmű-e az  $\mathbb{Z}$  számok körében a legnagyobb közös osztó? Ismertesse a kapcsolódó jelöléseket!**

Nem,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  számok legnagyobb közös osztói közül az egyik nemnegatív. Ennek jelölései:  $\text{lko}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\text{gcd}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

**145. Egyértelmű-e az  $\mathbb{Z}$  számok körében a legkisebb közös többszörös? Ismertesse a kapcsolódó jelöléseket!**

Nem,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  számok legkisebb közös többszöröse közül az egyik nemnegatív. Ennek jelölései:  $\text{lkkt}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$

**146. Ismertesse a bővített euklideszi algoritmust!**

Célja  $a, b$  egészek  $d$  legnagyobb közös osztójának, illetve  $x, y \in \mathbb{Z}$  számok meghatározása úgy, hogy  $d = ax + by$  teljesüljön.

1. [Init] LEGYEN  $x_0 \leftarrow 1, y_0 \leftarrow 0, r_0 \leftarrow a, x_1 \leftarrow 0, y_1 \leftarrow 1, r_1 \leftarrow b, n \leftarrow 0$
2. [Vége?] HA  $r_{n+1} = 0$  AKKOR  $x \leftarrow x_n, y \leftarrow y_n, d \leftarrow r_n$  VÉGE.
3. [Ciklus] LEGYEN  $q_{n+1} \leftarrow \lfloor r_n/r_{n+1} \rfloor, r_{n+2} \leftarrow r_n \bmod r_{n+1} = r_n - r_{n+1}q_{n+1}, x_{n+2} \leftarrow x_n - x_{n+1}q_{n+1}, y_{n+2} \leftarrow y_n - y_{n+1}q_{n+1}, n \leftarrow n + 1$  ÉS MENJÜNK (2)-RE.

**147. Mely tétel alapján számolhatjuk ki véges sok egész szám legnagyobb közös osztóját prímfelbontás nélkül?**

Bármely  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  számok legnagyobb közös osztójának a kiszámítása visszavezethető két szám legnagyobb közös osztójára:

$$\text{lko}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{lko}(\text{lko}(a_1, a_2), a_3, \dots, a_n)$$

Emiatt az euklideszi algoritmus ismételt alkalmazásával is kiszámítható a legnagyobb közös osztó.

**148. Fogalmazza meg a számelmélet alaptételét!**

Minden  $\mathbb{N}^+$  szám a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható prímszámok szorzataként.

**149. Ismertesse Erathoszthenész szitáját!**

Segítségével egy adott  $n$ -ig tudjuk meghatározni a prímeket. Lépései:

1. Írjuk fel a számokat 2-től  $n$ -ig.
2. Az első szám (2) prím, az összes többi többszöröse összetett, ezért húzzuk ki őket!
3. A megmaradó számok közül az első prím (3), húzzuk ki a többszöröseit!
4. A végén  $n$ -nél nem nagyobb prímelek maradnak.

**150. Definiálja egész számok kongruenciáját, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket!**

$a, b, m \in \mathbb{Z}$  és  $m \mid a - b \Rightarrow a$  és  $b$  kongruensek modulo  $m$ . Jelölés:  $a \equiv b \pmod{m}$

**151. Fogalmazza meg az egész számok kongruenciájának egyszerű tulajdonságait!**

$a, b, d \in \mathbb{Z}$

1.  $(a \equiv b \pmod{m} \wedge d \mid m) \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$
2.  $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow 0 \neq d \in \mathbb{Z} (ad \equiv bd \pmod{md})$
3. bármely adott  $m \in \mathbb{Z}$ -re a kongruencia ekvivalenciareláció  $\mathbb{Z}$ -ben
4.  $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{-m}$

**152. Definiálja a maradékosztály, redukált maradékosztály, teljes és redukált maradékrendszer fogalmát!**

Egy  $m \in \mathbb{Z}$  modulus szerinti kongruencia ekvivalenciaosztályait *maradékosztály*oknak nevezzük.

Ha egy maradékosztály valamelyik eleme relatív prím a modulushoz, akkor mindegyik, és ekkor a maradékosztályt *redukált maradékosztály*nak nevezzük.

Páronként inkongruens egészek egy rendszerét *maradékrendszer*nek nevezzük.

Ha egy maradékrendszer minden maradékosztályból tartalmaz elemet, akkor *teljes maradékrendszer*nek nevezzük.

Ha egy maradékrendszer pontosan a redukált maradékosztályokból tartalmaz elemet, akkor *redukált maradékrendszer*.

**153. Definiálja  $\mathbb{Z}_m$ -et! Milyen algebrai struktúra  $\mathbb{Z}_m$  az összeadással és a szorzással?**

Az  $m \in \mathbb{Z}$  modulus szerinti kongruencia kompatibilis az összeadással és a szorzással. A maradékosztályok kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak az összeadással és a szorzással. Ezt a gyűrűt jelöljük  $\mathbb{Z}_m$ -el.

**154. Fogalmazza meg a  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  gyűrű tulajdonságát leíró tételt!**

$1 < m \in \mathbb{Z}$

1.  $(1 < \text{lko}(a, m) < m) \Rightarrow a$  maradékosztálya nullosztó  $\mathbb{Z}_m$ -ben.
2.  $(\text{lko}(a, m) = 1) \Rightarrow a$  maradékosztályának van multiplikatív inverze  $\mathbb{Z}_m$ -ben.

**155. Mit mondhatunk az  $aa_i + b$  számokról, ha  $a_i$  egy maradékrendszer, illetve egy redukált maradékrendszer elemeit futja be?**

$1 < m \in \mathbb{Z}$ ,  $a$  relatív prím  $m$ -hez.

Ha  $a_1, a_2, \dots, a_m$  teljes maradékrendszer modulo  $m \wedge b \in \mathbb{Z}$ , akkor  $aa_1 + b, aa_2 + b, \dots, aa_m + b$  is teljes maradékrendszer modulo  $m$ .

Ha  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$  redukált maradékrendszer modulo  $m$ , akkor  $aa_1, aa_2, \dots, aa_{\varphi(m)}$  is redukált maradékrendszer modulo  $m$ .

**156. Fogalmazza meg az Euler-Fermat-tételt!**

$1 < m \in \mathbb{Z}$ ,  $a$  relatív prím  $m$ -hez.

Ekkor  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ .

**157. Fogalmazza meg a Fermat-tételt!**

Legyen  $p$  prímszám

1.  $a \in \mathbb{Z} \wedge p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

2.  $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$ .

**158. Fogalmazza meg a kínai maradéktételt!**

Legyenek  $m_1, m_2, \dots, m_n$  egymánál nagyobb, páronként relatív prím  $\mathbb{N}$  számok,  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$ . Az  $x \equiv c_j \pmod{m_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  kongruenciarendszer megoldható, és bármely két megoldása kongruens modulo  $m_1 m_2 \cdots m_n$ .