PROGRAMOZÁS MÓDSZERTANI ALAPJAI I. TÉTELEK ÉS DEFINÍCIÓK

Szerkesztette: Bókay Csongor

2012 tavaszi félév

Az esetleges hibákat kérlek a *csongor@csongorbokay.com* címen jelezd!
Utolsó módosítás: 2012. június 14.

A csillagozott tételeket és definíciókat nem tartalmazza a hivatalos tételsor, ám szükségesek az említett tételek, illetve definíciók felírásához. Szürke háttérrel a piroskeretes tételeket jelöltem.

I. rész

Alapfogalmak

1. Állapottér

I egy véges halmaz; $\emptyset \neq A_i, i \in I$ tetszőleges véges vagy megszámlálható halmazok. Ekkor az $A = \times_{i \in I} A_i$ halmazt *állapottér*nek, az A_i halmazokat pedig *típusértékhalmaz*oknak nevezzük.

2. Feladat

Egy $F \subseteq A \times A$ relációt *feladat*nak nevezzük.

3. Program

Egy $S \subseteq A \times A^{**}$ relációt *program*nak nevezünk, ha

1. $\mathcal{D}_S = A$;
2. $\forall \alpha \in \mathcal{R}_S : \alpha = red(\alpha)$;
3. $\forall a \in A : \forall \alpha \in S(a) : |\alpha| \neq 0 \land \alpha_1 = a$.

4. Programfüggvény

A $p(S) \subseteq A \times A$ reláció az $S \subseteq A \times A^{**}$ program *programfüggvény*e, ha

1. $\mathcal{D}_{p(S)} = \{a \in A \mid S(a) \subseteq A^*\}$;
2. $\forall a \in \mathcal{D}_{p(S)} : p(S)(a) = \{b \in A \mid \exists \alpha \in S(a) : \tau(\alpha) = b\}$.

5. Megoldás

Azt mondjuk, hogy az S program *megoldja* az F feladatot, ha

1. $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}$;
2. $\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S)(a) \subseteq F(a)$.

6. Szigorítás

Azt mondjuk, hogy az $F_1 \subseteq A \times A$ feladat *szigorú*bb, mint az $F_2 \subseteq A \times A$, ha

1. $\mathcal{D}_{F_2} \subseteq \mathcal{D}_{F_1}$;
2. $\forall a \in \mathcal{D}_{F_2} : F_1(a) \subseteq F_2(a)$.

Állítás *Ha F_1 szigorúbb, mint F_2, és S megoldása F_1-nek, akkor S megoldása F_2-nek is.*

Állítás *Ha S program megoldása $F_1 \subseteq A \times A$ feladatnak, az $F_2 \in B \times B$ szintén feladat és $F_1 = F_2$, akkor S megoldása F_2-nek is.*

7. Programozási feladat

Legyen $A = \times_{i \in I} A_i$. Az $(F, \mathbb{P}, \mathbb{K})$ hármast *programozási feladat*nak nevezzük, ahol $F \subseteq A \times A$ egy feladat, $\mathbb{P}$ a primitív programok véges halmaza ($\forall S \in \mathbb{P} : S \subseteq A \times A^{**}$), $\mathbb{K}$ a megengedett programkonstrukciók véges halmaza, $\forall K \in \mathbb{K}$ egy az A-n értelmezett programok halmazán értelmezett művelet.

Programozási feladat megoldása Az $(F, \mathbb{P}, \mathbb{K})$ programozási feladatnak az S program megoldása, ha S a primitív programokból a megengedett konstrukciókkal előállítható, és megoldása F-nek.

II. rész
Kiterjesztés

8. Feladat kiterjesztése

A, B állapotterek; $B \leq A$.
Az $F' \subseteq A \times A$ relációt az $F \subseteq B \times B$ *feladat kiterjesztésének* nevezzük, ha
$F' = \Big\{(x, y) \in A \times A \mid (pr_B(x), pr_B(y)) \in F\Big\}$.

9. Program kiterjesztése

A, B állapotterek; $B \leq A$; B' a B kiegészítő altere A-ra; $S \subseteq B \times B^{**}$.
Ekkor $S' \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S *program kiterjesztésének* nevezzük, ha $\forall a \in A$:
$S'(a) = \{\alpha \in A^{**} \mid pr_B(\alpha) \in S(pr_B(a)) \wedge \forall i \in \mathcal{D}_\alpha : pr_{B'}(\alpha_i) = pr_{B'}(a)\}$.

Állítás *A, B állapotterek; $B \leq A$; B' a B kiegészítő altere A-ra; $S \subseteq B \times B^{**}$; S' az S kiterjesztése A-ra. Ekkor S' program.*

10. Programok ekvivalenciája *

$S_1 \subseteq A_1 \times A_1^{**}, S_2 \subseteq A_2 \times A_2^{**}$ programok; $B \leq A_1 \wedge B \leq A_2$.
Azt mondjuk, hogy az S_1 *ekvivalens* S_2-vel B-n, ha $pr_B(p(S_1)) = pr_B(p(S_2))$.

Állítás Egy program kiterjesztése és az eredeti program az eredeti állapottéren ekvivalens.

11. Bővített identitás *

$B \leq A$; B' a B kiegészítő altere A-ra, $G \subseteq A \times A$ reláció. A G *bővített identitás* B' felett, ha $\forall (a, a') \in G : \exists a'' \in A : (a, a'') \in G \wedge pr_{B'}(a) = pr_{B'}(a'') \wedge pr_B(a') = pr_B(a'')$.

12. Vetítéstartás *

$B \leq A$; $G \subseteq A \times A$ feladat.
A G *vetítéstartó* B felett, ha $\forall a_1, a_2 \in \mathcal{D}_G : (pr_B(a_1) = pr_B(a_2)) \Rightarrow \Big(pr_B\left(G(a_1)\right) = pr_B\left(G(a_2)\right)\Big)$.

13. Félkiterjesztés *

$B \leq A$; $G \subseteq A \times A$ feladat; $H \subseteq B$.
Azt mondjuk, hogy a G *félkiterjesztés* H felett, ha $pr_B^{-1}(H) \subseteq \mathcal{D}_G$.

14. Kiterjesztési tételek

$B \leq A$; B' a B kiegészítő altere A-ra, $S \subseteq B \times B^{**}$ program; $F \subseteq B \times B$ feladat; S', illetve F' az S-nek, illetve az F-nek a kiterjesztése A-ra; $\hat{F} \subseteq A \times A : pr_B(\hat{F}) = F$ feladat; $\hat{S} \subseteq A \times A^{**}$ program ekvivalens S-sel B-n. Ekkor a következő állítások teljesülnek:

1. S' megoldása F'-nek $\Rightarrow S$ megoldása F-nek;
2. S' megoldása $\hat{F}$-nek $\Rightarrow S$ megoldása F-nek;
3. $\hat{S}$ megoldása F'-nek $\Rightarrow S$ megoldása F-nek;
4. (a) $\hat{S}$ megoldása $\hat{F}$-nek $\wedge\ p(\hat{S})$ vetítéstartó B felett $\Rightarrow S$ megoldása F-nek;
   (b) $\hat{S}$ megoldása $\hat{F}$-nek $\wedge\ \hat{F}$ félkiterjesztés $\mathcal{D}_F$ felett $\Rightarrow S$ megoldása F-nek;
5. S megoldása F-nek $\Rightarrow S'$ megoldása F'-nek;
6. S megoldása F-nek $\wedge\ \hat{F}$ bővített identitás B' felett és vetítéstartó B felett $\Rightarrow S'$ megoldása $\hat{F}$-nek;
7. S megoldása F-nek $\wedge\ p(\hat{S})$ félkiterjesztés $\mathcal{D}_F$ felett $\Rightarrow \hat{S}$ megoldása F'-nek.

III. rész
A megoldás fogalmának általánosításai

15. A megoldás fogalmának kiterjesztése

$A = \times_{i \in I} A_i$, $B = \times_{j \in J} B_j$; $F \subseteq A \times A$ feladat; $S \subseteq B \times B^{**}$ program.
Ha $\exists C : A \leq C \wedge B \leq C$, és S kiterjesztése C-re – eredeti értelemben – megoldása F C-re való kiterjesztettjének, akkor azt mondjuk, hogy S – *kiterjesztett* értelemben – *megoldása* F-nek.

16. Ekvivalens állapottér *

Az $A = \times_{i \in I} A_i$ állapottér *ekvivalens* a $B = \times_{j \in J} B_j$ állapottérrel, ha $\exists f : I \to J$ bijekció, hogy $\forall i \in I : A_i = B_{f(i)}$. Jelölés: $A \overset{f}{\sim} B$.

17. Megoldás átnevezéssel

$A \overset{f}{\sim} B$; $F \subseteq A \times A$ feladat; $S \subseteq B \times B^{**}$ program. Azt mondjuk, hogy az S az f *átnevezéssel megoldás*a F-nek, ha

1. $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{\gamma_f \circ p(S) \circ \gamma_f^{(-1)}}$;
2. $\forall a \in \mathcal{D}_F : \gamma_f \circ p(S) \circ \gamma_f^{(-1)}(a) \subseteq F(a)$.

18. Általánosított megoldás

$F \subseteq A \times A$ feladat; $S \subseteq B \times B^{**}$ program.
Ha $\exists C, D : C \overset{f}{\sim} D \wedge A \leq C \wedge B \leq D \wedge S$ kiterjesztése D-re átnevezéssel megoldása F C-re való kiterjesztettjének, akkor azt mondjuk, hogy S – *általános* értelemben – *megoldás*a F-nek.

19. Reláció szerinti megoldás

$F \subseteq A \times A$; $S \subseteq B \times B^{**}$; $\gamma \subseteq B \times A$. Azt mondjuk, hogy S γ *reláció szerint megoldás*a F-nek, ha

1. $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{\gamma \odot p(S) \odot \gamma^{(-1)}}$;
2. $\forall a \in \mathcal{D}_F : \gamma \odot p(S) \odot \gamma^{(-1)}(a) \subseteq F(a)$.

20. Reláció szerinti megoldás tétele

F tetszőleges feladat, állapottere A, egy paramétere B, elő- és utófeltétele pedig Q_b és R_b;
$S \subseteq C \times C^{**}$ program; $\gamma \subseteq C \times A$ tetszőleges olyan reláció, melyre $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{R}_\gamma$.
Definiáljuk a következő függvényeket:

$$\lceil Q_b^\gamma \rceil = \lfloor Q_b \circ \gamma \rfloor \quad \text{és} \quad \lceil R_b^\gamma \rceil = \lceil R_b \circ \gamma \rceil.$$

Ekkor ha $\forall b \in B : Q_b^\gamma \Rightarrow lf(S, R_b^\gamma)$, akkor az S program γ *szerint megold*ja az F feladatot.

IV. rész
Specifikáció

21. Leggyengébb előfeltétel

$S \subseteq A \times A^{**}$ program; $R : A \to \mathbb{L}$ állítás.
Ekkor az S program R utófeltételhez tartozó *leggyengébb előfeltétele* az az $lf(S,R) : A \to \mathbb{L}$ függvény, amelyre $\lceil lf(S,R) \rceil = \left\{ a \in A \;\middle|\; a \in \mathcal{D}_{p(S)} \wedge p(S)(a) \subseteq \lceil R \rceil \right\}$.

Állítás $\lceil lf(S,R) \rceil = \lceil R \circ p(S) \rceil$.

22. Az lf tulajdonságai

$S \subseteq A \times A^{**}$ program; $Q, R : A \to \mathbb{L}$ állítások. Ekkor:

1. $lf(S, Hamis) = Hamis$;
2. ha $Q \Rightarrow R$, akkor $lf(S,Q) \Rightarrow lf(S,R)$;
3. $lf(S,Q) \wedge lf(S,R) = lf(S, Q \wedge R)$;
4. $lf(S,Q) \vee lf(S,R) \Rightarrow lf(S, Q \vee R)$.

23. Változó

Az $A = \times_{i \in I} A_i$ állapottér $v_i : A \to A_i$ egydimneziós projekciós függvényeit *változó*knak nevezzük.

24. Paraméter *

$F \subseteq A \times A$ feladat. A B halmazt a feladat *paraméterter*ének nevezzük, ha van olyan F_1 és F_2 reláció, hogy $F_1 \subseteq A \times B$; $F_2 \subseteq B \times A$; $F = F_2 \circ F_1$.

25. Specifikáció tétele

$F \subseteq A \times A$ feladat; B az F egy paramétere; $F_1 \subseteq A \times B$; $F_2 \subseteq B \times A$; $F = F_2 \circ F_1$.
Legyen $b \in B$, és definiáljuk a következő állításokat:

$$\begin{aligned} \lceil Q_b \rceil &= \{a \in A \mid (a,b) \in F_1\} = F_1^{(-1)}(b); \\ \lceil R_b \rceil &= \{a \in A \mid (b,a) \in F_2\} = F_2(b). \end{aligned}$$

Ekkor, ha $\forall b \in B : Q_b \Rightarrow lf(S, R_b)$, akkor az S program megoldja az F feladatot.

Állítás (jó specifikáció) *Ha a feladat specifikációjának felírásakor úgy választjuk meg a paraméterteret és az elő-, utófeltételeket, hogy rájuk a következő két feltétel teljesüljön:*

1. $\forall b \in B : \lceil Q_b \rceil \neq \emptyset \Rightarrow \lceil R_b \rceil \neq \emptyset$;
2. $\forall b_1, b_2 \in B : \lceil Q_{b_1} \rceil \cap \lceil Q_{b_2} \rceil = \emptyset \vee (\lceil Q_{b_1} \rceil = \lceil Q_{b_2} \rceil \wedge \lceil R_{b_1} \rceil = \lceil R_{b_2} \rceil)$,

akkor a specifikáció tétele megfordítható.

V. rész

Szekvencia

26. Definíció

Felhasznált jelölés $\alpha \in A^*$; $\beta \in A^{**}$. $\chi_2(\alpha, \beta) := red(kon(\alpha, \beta))$.
$S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$ programok. Az $S \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_1 és S_2 *szekvenciá*jának nevezzük, ha

$$\begin{aligned} \forall a \in A : S(a) &= \left\{\alpha \in A^{\infty} \mid \alpha \in S_1(a)\right\} \cup \\ &\cup \left\{\chi_2(\alpha, \beta) \in A^{**} \mid \alpha \in S_1(a) \cap A^* \wedge \beta \in S_2\left(\tau(\alpha)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Jelölés $(S_1; S_2)$.

Struktogram Az $S = (S_1; S_2)$ szekvencia struktogramja:

S

S_1
S_2

27. Programfüggvény

A tetszőleges állapottér; S_1, S_2 programok A-n; $S = (S_1; S_2)$. Ekkor $p(S) = p(S_2) \odot p(S_1)$.

28. Levezetési szabály

$S = (S_1; S_2)$; Q, R, Q' állítások A-n.
$\Big((Q \Rightarrow lf(S_1, Q')) \wedge (Q' \Rightarrow lf(S_2, R))\Big) \Rightarrow (Q \Rightarrow lf(S, R))$.

29. Levezetési szabály megfordítása *

$S = (S_1; S_2)$; Q, R olyan állítások A-n, amelyekre $Q \Rightarrow lf(S, R)$.
Ekkor $\exists Q' : A \to \mathbb{L}$ állítás, amelyre $(Q \Rightarrow lf(S_1, Q')) \wedge (Q' \Rightarrow lf(S_2, R))$.

VI. rész
Elágazás

30. Definíció

$\pi_1, \ldots, \pi_n : A \to \mathbb{L}$ feltételek; $S_1, \ldots, S_n$ programok A-n. Ekkor az $IF \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_i-kből képzett, π_i-k által meghatározott *elágazás*nak nevezünk.

$$\forall a \in A : IF(a) = \bigcup_{i=1}^{n} w_i(a) \cup w_0(a)$$

ahol $\forall i \in [1..n]$:

$$w_i(a) = \begin{cases} S_i(a), & \text{ha } a \in \lceil \pi_i \rceil; \\ \emptyset & \text{különben.} \end{cases} \quad \text{és} \quad w_0(a) = \begin{cases} \{\langle a, a, \ldots \rangle\}, & \text{ha } \forall i \in [1..n] : a \notin \lceil \pi_i \rceil; \\ \emptyset & \text{különben.} \end{cases}$$

Jelölés $(\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$.

Struktogram Az $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$ elágazás struktogramja:

IF

π_1	$\cdots$	π_n
S_1	$\cdots$	S_n

31. Programfüggvény

$S_1, \ldots, S_n \subseteq A \times A^{**}$ programok; $\pi_1, \ldots, \pi_n : A \to \mathbb{L}$ feltételek az A-n; $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$ Ekkor

1. $\mathcal{D}_{p(IF)} = \left\{ a \in A \;\middle|\; a \in \bigcup_{i=1}^{n} \lceil \pi_i \rceil \wedge \forall i \in [1..n] : a \in \lceil \pi_i \rceil \Rightarrow a \in \mathcal{D}_{p(S_i)} \right\}$
2. $\forall a \in \mathcal{D}_{p(IF)} : p(IF)(a) = \bigcup_{i=1}^{n} p(S_i)|_{\lceil \pi_i \rceil}(a)$.

32. Levezetési szabály

$IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$; Q, R állítások A-n.

Ha $\quad Q \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \pi_i \quad$ és $\quad \forall i \in [1..n] : Q \wedge \pi_i \Rightarrow lf(S_i, R), \quad$ akkor $\quad Q \Rightarrow lf(IF, R)$.

33. Levezetési szabály megfordítása *

$IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$; Q, R olyan állítások A-n, amelyekre $Q \Rightarrow lf(IF, R)$.

Ekkor $\quad Q \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \pi_i \quad$ és $\quad \forall i \in [1..n] : Q \wedge \pi_i \Rightarrow lf(S_i, R)$.

VII. rész
Ciklus

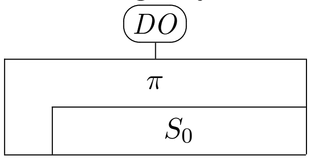
34. Definíció

$\pi : A \to \mathbb{L}$ feltétel; $S_0 \subseteq A \times A^{**}$. A $DO \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_0-ból a π feltétellel képzett *ciklus*nak nevezzük, ha
$\forall a \notin \lceil \pi \rceil : DO(a) = \{\langle a \rangle\}$;
$\forall a \in \lceil \pi \rceil$:

$$
\begin{aligned}
DO(a) \quad = \quad & \Big\{ \alpha \in A^{**} \;\Big|\; \exists \alpha^1, \dots, \alpha^n \in A^{**} : \alpha = \chi_n(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \quad \wedge \\
& \alpha^1 \in S_0(a) \quad \wedge \\
& \forall i \in [1..n-1] : \Big(\alpha^i \in A^* \wedge \alpha^{i+1} \in S_0(\tau(\alpha^i)) \wedge \tau(\alpha^i) \in \lceil \pi \rceil \Big) \quad \wedge \\
& \Big(\alpha^n \in A^\infty \vee \Big(\alpha^n \in A^* \wedge \tau(\alpha^n) \notin \lceil \pi \rceil \Big) \Big) \Big\} \quad \cup \\
\cup \quad & \Big\{ \alpha \in A^\infty \;\Big|\; \forall i \in \mathbb{N} : \exists \alpha^i \in A^* : \alpha = \chi_\infty(\alpha^1, \alpha^2, \dots) \quad \wedge \\
& \alpha^1 \in S_0(a) \quad \wedge \\
& \forall i \in \mathbb{N} : \Big(\alpha^i \in A^* \wedge \alpha^{i+1} \in S_0(\tau(\alpha^i)) \wedge \tau(\alpha^i) \in \lceil \pi \rceil \Big) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Jelölés (π, S_0).

Struktogram A $DO = (\pi, S_0)$ ciklus struktogramja:



35. Programfüggvény

A tetszőleges állapottér; S program; π feltétel A-n; $DO = (\pi, S)$. Ekkor: $p(DO) = \overline{p(S)|_\pi}$.

36. Levezetési szabály

P, Q, R állítás A-n; $t : A \to \mathbb{Z}$; $DO = (\pi, S_0)$. Ha

1. $Q \Rightarrow P$,
2. $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$,
3. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$,
4. $P \wedge \pi \Rightarrow lf(S_0, P)$,
5. $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow lf(S_0, t < t_0)$,

akkor $Q \Rightarrow lf(DO, R)$.

37. Levezetési szabály megfordítása *

$DO = (\pi, S_0)$; Q, R olyan állítások A-n, amelyekre $Q \Rightarrow lf(DO, R)$, és tfh. $p(DO) = \overline{\overline{p(S_0)|_\pi}}$. Ekkor létezik P állítás és $t : A \to \mathbb{Z}$ függvény, amelyekre

1. $Q \Rightarrow P$,
2. $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$,
3. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$,
4. $P \wedge \pi \Rightarrow lf(S_0, P)$,
5. $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow lf(S_0, t < t_0)$.

VIII. rész
Elemi programok

38. Elemi program *

Egy $S \subseteq A \times A^{**}$ programot *elem*inek nevezünk, ha
$\forall a \in A : S(a) \subseteq \{\langle a\rangle, \langle a, a, \dots\rangle, \langle a, b\rangle \mid b \neq a\}$.

39. SKIP *

$SKIP$-nek nevezzük azt a programot, amelyre $\forall a \in A : SKIP(a) = \{\langle a\rangle\}$.

40. ABORT *

$ABORT$-tal jelöljük azt a programot, amelyre $\forall a \in A : ABORT(a) = \{\langle a, a, \dots\rangle\}$.

41. Értékadás

$A = A_1 \times \dots \times A_n$; $F = (F_1, \dots, F_n)$. Az S program *általános értékadás*, ha

$$\forall a \in A : S(a) = \begin{cases} \{red(\langle a, b\rangle) \mid b \in F(a)\}, & \text{ha } a \in \mathcal{D}_F; \\ \{\langle a, a, \dots\rangle\}, & \text{ha } a \notin \mathcal{D}_F. \end{cases}$$

Általános értékadás speciális esetei

- $\mathcal{D}_F = A \quad \Rightarrow \quad S$ programot *értékkiválasztás*nak nevezzük.
- F reláció függvény, akkor az S programot *értékadás*nak nevezzük.
- $\mathcal{D}_F \subset A \quad \Rightarrow \quad S$ programot *parciális értékkiválasztás*nak nevezzük.
- $\mathcal{D}_F \subset A \wedge F$ determinisztikus, akkor az S programot *parciális értékadás*nak nevezzük.

42. Leggyengébb előfeltételük

1. $lf(SKIP, R) = R$;
2. $lf(ABORT, R) = Hamis$;
3. Értékadás esetén: $lf(a := F(a), R) = R \circ F$;
4. Parciális értékadás esetén:
$$\forall b \in A : lf(a := F(a), R)(b) = \begin{cases} R \circ F(b), & \text{ha } b \in \mathcal{D}_F; \\ Hamis, & \text{ha } b \notin \mathcal{D}_F. \end{cases}$$
5. Értékkiválasztás esetén:
$$\forall b \in A : lf(a :\in F(a), R)(b) = \begin{cases} Igaz, & \text{ha } F(b) \subseteq \lceil R\rceil; \\ Hamis, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
6. Parciális értékkiválasztás esetén:
$$\forall b \in A : lf(a :\in F(a), R)(b) = \begin{cases} Igaz, & \text{ha } a \in \mathcal{D}_F \wedge F(b) \subseteq \lceil R\rceil; \\ Hamis, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

IX. rész
Típus

43. Típusspecifikáció

A $\mathcal{T}_s = (H, I_s, \mathbb{F})$ hármast *típusspecifikáció*nak nevezzük, ha
1. H az alaphalmaz,
2. $I_s : H \to \mathbb{L}$ a specifikációs invariáns,
3. $T_{\mathcal{T}} = \{(\mathcal{T}, x) \mid x \in \lceil I_s \rceil\}$ a típusértékhalmaz,
4. $\mathbb{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ a típusműveletek specifikációja ahol,
   $\forall i \in [1..n] : F_i \subseteq A_i \times A_i$, $A_i = A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_{n_i}}$ úgy, hogy $\exists j \in [1..n_i] : A_{i_j} = T_{\mathcal{T}}$.

44. Típus

A $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$ hármast *típus*nak nevezzük, ha
1. $\varrho \subseteq E^* \times T$ a reprezentációs függvény, ahol
   T a típusértékhalmaz, E az elemi típusértékhalmaz,
2. $I : E^* \to \mathbb{L}$ típusinvariáns,
3. $\mathbb{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$, ahol
   $\forall i \in [1..m] : S_i \subseteq B_i \times B_i^{**}$ program, $B_i = B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_{m_i}}$ úgy,
   hogy $\exists j \in [1..m_i] : B_{i_j} = E^*$ és $\nexists j \in [1..m_i] : B_{i_j} = T$.

Elemi típus Egy $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$ típus elemi, ha $T = E$ és $\varrho|_{\lceil I \rceil} = Id_E$.

Illeszkedés A $C = C_1 \times \cdots \times C_r$ és $D = D_1 \times \cdots \times D_r$ állapotterek *illeszkednek*, ha

$$\forall i \in [1..r] : D_r = \begin{cases} E^*, & \text{ha } C_i = T_{\mathcal{T}}; \\ C_i, & \text{különben.} \end{cases}$$

45. Megoldás ϱ-n keresztül *

$S \subseteq B \times B^{**}$ program a ϱ-n keresztül *megoldja* az $F \subseteq A \times A$ feladatot, ha $\exists C, D$ illeszkedő terek, amelynek altere A, illetve B, hogy $S'\gamma$ szerint megoldása F'-nek, ahol $\gamma \subseteq D \times C$ a fenti értelemben definiált leképezés, S' az S kiterjesztése D-re, F' pedig az F kiterjesztése C-re.

46. Megfelelés

Egy $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$ típus *megfelel* a $\mathcal{T}_s = (H, I_s, \mathbb{F})$ típusspecifikációnak, ha
1. $\varrho(\lceil I \rceil) = T_{\mathcal{T}}$,
2. $\forall F \in \mathbb{F} : \exists S \in \mathbb{S} : S$ a ϱ-n keresztül megoldja F-et.

47. Típusspecifikáció tétele

$\mathcal{T}_s = (H, I_s, \mathbb{F})$ és $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$ adott típusspecifikáció és típus; $\varrho(\lceil I \rceil) = T_{\mathcal{T}}$; $F \in \mathbb{F}$; F állapottere A, egy paramétere B, elő- és utófeltétele pedig Q_b és R_b. Legyen $S \in \mathbb{S}$, és tfh. S állapottere illeszkedik F állapotteréhez. Definiáljuk a következő állításokat:

$$\lceil Q_b^\gamma \rceil = \lfloor Q_b \circ \gamma \rfloor,$$
$$\lceil R_b^\gamma \rceil = \lceil R_b \circ \gamma \rceil,$$

ahol γ a program és a feladat állapottere közötti, a ϱ-n keresztüli megoldás definíciójában szereplő leképezés. Ekkor ha $\forall b \in B : Q_b^\gamma \Rightarrow lf(S, R_b^\gamma)$, akkor az S program ϱ-n keresztül megoldja az F feladatot.

48. Megfelelés általánosítása

A $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$ típus – *általános* értelemben – *megfelel* a $\mathcal{T}_s = (H, I_s, \mathbb{F})$ típusspecifikációnak, ha létezik olyan ekvivalens típusspecifikáció, amelynek az eredeti értelemben megfelel.

49. Absztrakt típus

$\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$ egy típus; A $p(\mathcal{T}) = (p(\varrho), p(\mathbb{S}))$-t $\mathcal{T}$ *absztrakt típus*ának nevezzzük, ha

1. $\forall \varepsilon \in E^* : p(\varrho)(\varepsilon) = \varrho|_{\lceil I \rceil}(\varepsilon)_2$,
2. $p(\mathbb{S}) = \{p(S) \mid S \in \mathbb{S}\}$.

Forrás

[1] Fóthi Á.: *Bevezetés a programozáshoz*. Egyetemi jegyzet. ELTE IK, 2012.